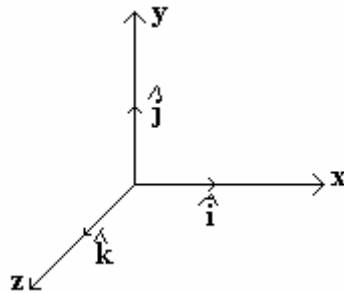


PERSAMAAN GERAK

Posisi titik materi dapat dinyatakan dengan sebuah **VEKTOR**, baik pada suatu bidang datar maupun dalam bidang ruang.

Vektor yang dipergunakan untuk menentukan posisi disebut **VEKTOR POSISI** yang ditulis dalam Vektor satuan.

VEKTOR SATUAN.



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

\hat{i} adalah vektor satuan pada sumbu x.

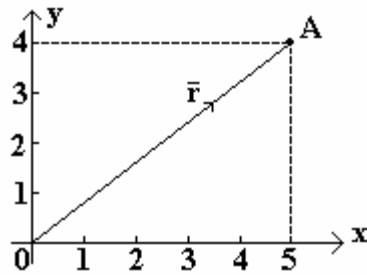
\hat{j} adalah vektor satuan pada sumbu y.

\hat{k} adalah vektor satuan pada sumbu z.

POSISI TITIK MATERI PADA SUATU BIDANG DATAR.

Posisi titik materi ini dapat dinyatakan dengan : $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$

Contoh : $\vec{r} = 5 \hat{i} + 4 \hat{j}$



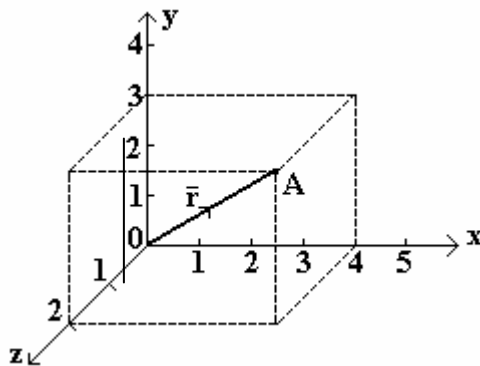
Panjang r ditulis $|\vec{r}| = |OA|$

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= \sqrt{5^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25 + 16} \\ &= \sqrt{41} \text{ satuan} \end{aligned}$$

POSISI TITIK MATERI PADA SUATU RUANG.

Posisi titik materi ini dapat dinyatakan dengan : $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$

Contoh : $\vec{r} = 4 \hat{i} + 3 \hat{j} + 2 \hat{k}$



Panjang vektor \vec{r} ditulis $|\vec{r}|$

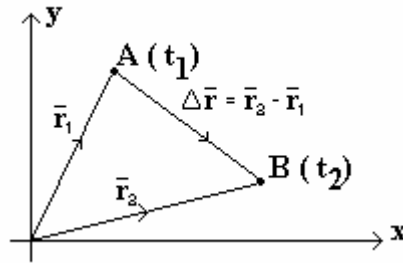
$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 4} \\ &= \sqrt{29} \text{ satuan} \end{aligned}$$

KECEPATAN SUATU TITIK MATERI.

Gerakan titik materi secara keseluruhan dapat diamati jika posisinya setiap saat diketahui. Seberapa cepat letak titik materi itu berubah setiap saat disebut : **KECEPATAN** .

PERHATIKAN.

Titik materi yang bergerak dari A yang posisinya \vec{r}_1 pada saat t_1 , ke titik B yang posisinya \vec{r}_2 pada saat t_2 .



Vektor perpindahannya $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ dan selang waktu yang dipergunakan titik materi untuk bergerak dari A ke B adalah $\Delta t = t_2 - t_1$

Kecepatan rata-rata didefinisikan :

$$\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Pada persamaan di atas tampak bahwa kecepatan rata-rata tidak tergantung pada lintasan titik materi, tetapi tergantung dari posisi awal (\vec{r}_1) dan posisi akhir (\vec{r}_2). Jika ingin diketahui kecepatan titik materi pada suatu saat misal saat titik materi berada di antara A dan B, digunakan **kecepatan sesaat**.

Kecepatan sesaat didefinisikan :

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Secara matematis ditulis sebagai :

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Jadi kecepatan sesaat merupakan turunan pertama dari posisi terhadap waktu (t)

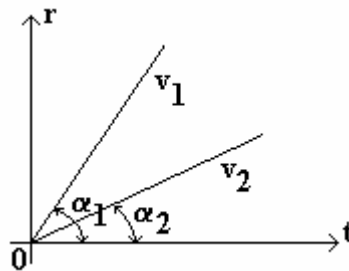
Besarnya kecepatan disebut dengan *laju*

Laju didefinisikan sebagai :

$$|\bar{v}| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$$

Laju dapat pula berarti panjang lintasan dibagi waktu yang bersangkutan.

Nilai dari komponen kecepatan sesaat dari suatu titik materi dapat dilihat dari *kemiringan grafik* yang dibentuk oleh komponen posisi (r) terhadap waktu (t).



Persamaan kecepatan sesaat dari grafik di samping di dapat :

$$v_1 = \text{tg } \alpha_1$$

$$v_2 = \text{tg } \alpha_2$$

Makin besar derajat kemiringannya makin besar pula harga kecepatannya.

Posisi dari suatu titik materi yang bergerak merupakan fungsi waktu, oleh karena itu, vektor posisi \bar{r} dapat ditulis sebagai $\bar{r} = \bar{r}(t)$ artinya \bar{r} merupakan fungsi waktu (t).

Kecepatan titik materi pada sebuah bidang datar/ruang dapat ditulis :

$$v_x = \frac{dX}{dt} \quad v_y = \frac{dY}{dt} \quad v_z = \frac{dZ}{dt}$$

X, Y, Z merupakan fungsi dari waktu.

Sebaliknya untuk menentukan posisi titik materi jika diketahui fungsi kecepatannya maka dapat diselesaikan dengan **INTEGRAL** (kebalikan dari diferensial).

$$v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

$$dX(t) = v(t).dt$$

$$\int dX(t) = \int v(t).dt$$

$$X(t) = \int v(t).dt$$

Contoh :

$$v_{(t)} = 2t + 5 \text{ m/det}$$

maka persamaan posisi titik materi tersebut adalah

$$\bar{r} = \int v dt$$

$$\int 2t + 5 dt$$

$$\bar{r} = t^2 + 5t + C \text{ meter}$$

Dengan C adalah suatu konstanta.

Harga C dicari dengan suatu syarat batas tertentu, misalnya :

$$t = 0 \quad \bar{r}_{(0)} = 0 \text{ maka harga C dapat dihitung } C = 0$$

PERCEPATAN

Kecepatan titik materi dapat berubah-ubah setiap saat baik besar, atau arah, ataupun kedua-duanya yang disebabkan oleh karena adanya *percepatan* yang dialami oleh titik materi tersebut.

Jika pada saat t_1 kecepatan v_1 dan pada saat t_2 kecepatannya v_2 , percepatan rata-ratanya dalam selang waktu $\Delta t = t_2 - t_1$ didefinisikan sebagai :

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

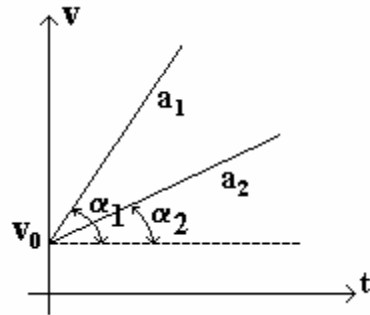
Percepatan sesaatnya :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(d\bar{r})}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Percepatan merupakan turunan pertama dari kecepatan terhadap waktu (t) atau turunan kedua dari posisi terhadap waktu (t).

Kecepatan sesaat dari suatu titik materi dapat dilihat dari kemiringan komponen grafik kecepatan (v) terhadap waktu (t).



dari grafik di samping besar percepatan sesaat :

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$$

Percepatan dalam arah masing-masing sumbu dalam bidang/ruang dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d\bar{v}_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{d\bar{v}_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{d\bar{v}_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

Sebaliknya untuk menentukan kecepatan dari grafik fungsi percepatan terhadap waktu dengan cara *mengintegralkan* :

$$v_t = v_0 + \int_0^t a_{(t)} dt$$

KESIMPULAN :

Posisi titik materi, kecepatan dan percepatan merupakan besaran vektor, sehingga dapat dinyatakan dengan VEKTOR SATUAN.

POSISI	$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$
KECEPATAN	$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ $\vec{v} = \frac{dX}{dt} \hat{i} + \frac{dY}{dt} \hat{j} + \frac{dZ}{dt} \hat{k}$
PERCEPATAN	$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$ $\vec{a} = \frac{d^2X}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2Y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2Z}{dt^2} \hat{k}$

CONTOH SOAL.*(akan dibahas di kelas)***CONTOH 1.**

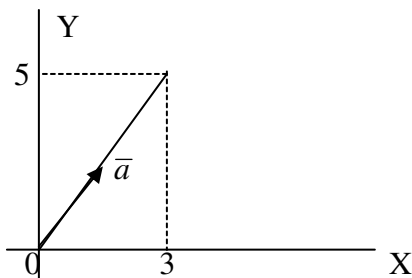
Sebuah benda bergerak sepanjang sumbu x dengan posisi :

$$\bar{x} = t^3 - 2t^2 - 4t - 16$$

- Carilah kedudukan benda pada saat $t = 3$ detik.
- Hitunglah perpindahan/pergeseran selama 3 detik pertama.
- Hitunglah kecepatan rata-rata selama 2 detik pertama.
- Hitunglah kecepatan rata-rata selama 2 detik kedua.
- Hitunglah kecepatan pada saat $t = 2$ detik.
- Hitunglah percepatan rata-rata selama 2 detik ketiga.
- Hitunglah percepatan pada saat $t = 3$ detik.
- Hitunglah kecepatan dan percepatan pada saat benda di $x = 0$
- carilah kedudukan benda pada saat kecepataannya NOL.
- Carilah kedudukan benda pada saat kecepataannya minimum
- Hitunglah selang waktu benda bergerak ke kiri.
- Hitunglah selang waktu benda bergerak ke kanan.
- Hitunglah waktu yang dibutuhkan benda untuk kembali ke tempat semula setelah bergerak.
- Carilah kedudukan benda saat benda tepat berbalik arah.
- Carilah kedudukan benda pada saat percepatannya 10 m/s^2
- Carilah kedudukan benda pada saat kecepataannya 11 m/s
- Hitunglah panjang lintasan yang ditempuh selama 3 detik pertama.

CONTOH 2.

Suatu benda bergerak dengan vektor percepatan sebagai berikut :

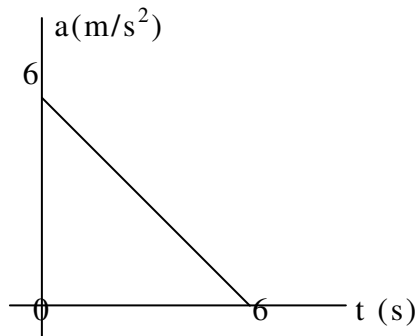


Pada saat $t = 0$ $v_x = 2$, $v_y = 0$ dan $r_x = 2$, $r_y = 4$

- Hitunglah kelajuan rata-rata 2 detik pertama.
- Hitunglah kelajuan pada saat $t = 2$ detik.
- Hitunglah pergeseran pada saat 2 detik pertama.
- Hitunglah kecepatan rata-rata 2 detik kedua.
- Hitunglah kecepatan pada saat $t = 4$ detik.
- Carilah posisi titik pada detik kedua.

CONTOH 3.

Suatu benda bergerak sepanjang sumbu-x dengan grafik fungsi percepatan terhadap waktu sebagai berikut :

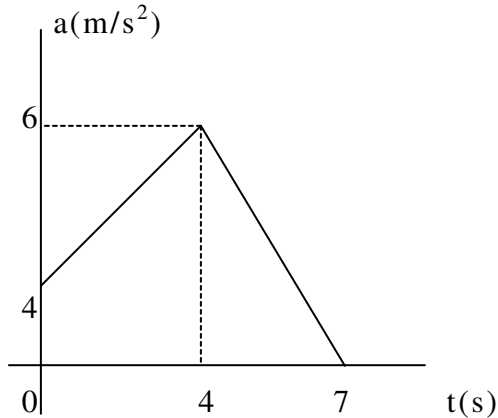


Pada saat $t = 0$, $v = 0$ dan $x = 0$

- Carilah kedudukan benda pada saat $t = 3$ detik.
- Hitunglah perpindahan selama 3 detik pertama.
- Hitunglah kecepatan rata-rata selama 2 detik kedua.
- Hitunglah kecepatan pada saat $t = 2$ detik.
- Hitunglah kecepatan pada saat benda kembali ke titik asal setelah bergerak.
- Carilah kedudukan benda pada saat jkecepatannya maksimum.
- Hitunglah selang waktu benda bergerak ke kiri.
- Hitunglah selang waktu benda bergerak ke kanan.
- Carilah kedudukan benda pada saat benda tepat berbalik arah.
- Hitunglah panjang lintasan yang ditempuh selama 3 detik pertama.

CONTOH 4.

Suatu benda bergerak sepanjang sumbu x dengan percepatan sebesar :
 $A = 2x + 4$ pada saat $x = 0$ $v = 4$ m/s. Hitunglah kecepatannya pada $x = 4$ meter.

CONTOH 5.

Suatu benda bergerak sepanjang sumbu x dengan grafik percepatan terhadap waktu seperti grafik di atas. Pada saat $t = 0$, $v = 2$ m/s dan $x = 10$ m.

- Hitunglah kecepatan rata-rata pada selang waktu $t = 3$ detik dan $t = 6$ detik.
- Hitunglah jarak yang ditempuh $t = 0$ hingga detik ke lima.

TUGAS SOAL-SOAL

1. Sebuah partikel bergerak searah dengan sumbu x, percepatannya $a = 5t + 4$ (a dalam m/s^2 dan t dalam detik). Mula-mula partikel tersebut terletak pada $x = 10$ meter dengan kecepatan 6 m/detik. Tentukanlah :

- a. Posisi partikel pada $t = 4$ detik. (jawab : $106\frac{1}{3}m$)
- b. Kecepatan partikel pada $t = 5$ detik. (jawab : $88\frac{1}{2}m/s$)
- c. Posisi partikel pada saat kecepatannya 12,5 m/detik. (jawab : $18\frac{5}{6}m$)
- d. Kecepatan partikel pada saat percepatannya $19 m/s^2$. (jawab : $40\frac{1}{2}m/s$)

2. Suatu benda bergerak sepanjang sumbu-x mengikuti persamaan $x = 2t^3 + 5t^2 - 5$ dengan x dalam meter dan t dalam detik.
- Tentukan persamaan kecepatan dan persamaan percepatan.
 - Tentukan posisi, kecepatan dan percepatan pada $t = 2$ s. (jawab : 31 m, 44 m/s, 34 m/s²)
 - Tentukan kecepatan rata-rata serta percepatan rata-rata antara $t = 2$ s dan $t = 3$ s. (jawab : 63 m/s , 40 m/s²)
3. Benda dengan kecepatan awal nol dipercepat dengan $a_x = 3 \text{ m/s}^2$ dan $a_y = -4 \text{ m/s}^2$ selama periode 2 detik. Carilah besar dan arah v pada akhir dari waktu itu. (jawab : 10 m/s , 307°)
4. Gerakan sebuah partikel merupakan fungsi posisi yang dinyatakan dengan persamaan $a = 4x + 3$ (a dalam m/det² dan x dalam meter) pada saat $x = 0$ kecepatannya 2 m/detik. Tentukan kecepatan partikel tersebut pada saat $x = 6$ m (jawab : $2\sqrt{46}$ m/s)
5. Suatu benda bergerak sepanjang sumbu x dengan :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t^4 - t^3 - 6t^2 + 10t + 6$$

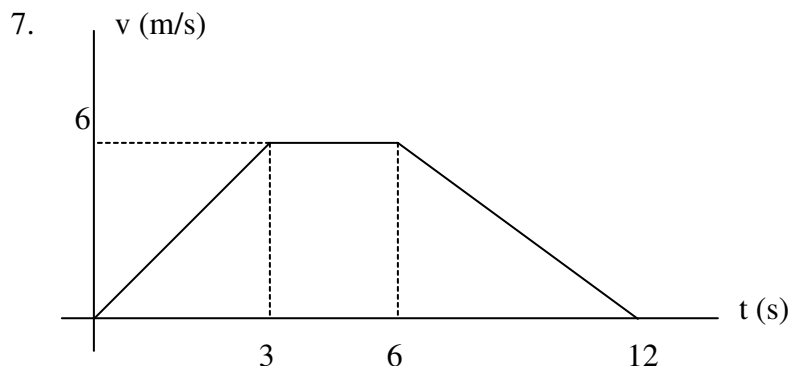
Dimana posisi benda tersebut pada saat kecepatannya maksimum. (jawab : 2)

6. Suatu benda mempunyai vector posisi :

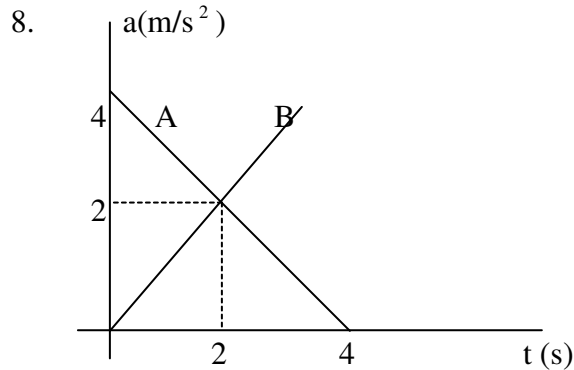
$$r_x = t^3 - 4 \quad \text{dan} \quad r_y = (t+1)^2$$

Tentukan persamaan kecepatan pada saat perlajuannya $2\sqrt{2}$ satuan.

$$\text{(jawab : } v = \frac{1}{3}\hat{i} + 2\frac{2}{3}\hat{j}\text{)}$$



Benda bergerak sepanjang sumbu x menurut grafik percepatan seperti di atas.
 Pada saat $t = 0$, dan $r = 0$. carilah posisi benda pada saat detik ke-9
 (jawab : 40,5 m)

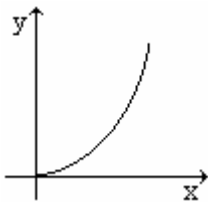


Benda A dan B bergerak sepanjang sumbu x, menurut grafik percepatan di atas, keduanya berangkat bersamaan dan dari tempat yang sama menuju arah yang sama, pada saat $t = 0$, $v = 0$ dan $r = 0$, kapan dan dimana A dan B bertemu kembali.
 (jawab : 6 detik , 36 m)

----o0o---o0o---o0o---o0o----

MEMADU GERAK

MEMADU GERAK GLB DENGAN GLBB, YANG SALING TEGAK LURUS.



Gerak resultannya adalah sebuah gerak parabola.

Misalkan arah kecepatan v kita sebut sumbu x dan arah percepatan a kita sebut sumbu y, maka persamaan-persamaan lintasannya ialah :

$$x = v \cdot t \quad t = \frac{x}{v}$$

$$y = \frac{5}{8} a t^2 \quad y = \frac{1}{2} a \left(\frac{x}{v}\right)^2$$

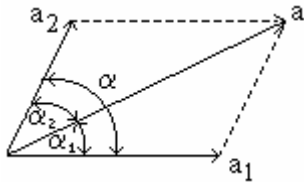
$$y = \frac{a}{2v^2} \cdot x^2 \quad \text{ini adalah suatu persamaan parabola.}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

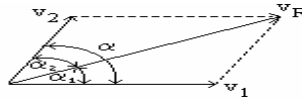
Kalau arah percepatan v dan arah percepatan a berimpit, maka gerak resultannya adalah sebuah gerak lurus di percepat beraturan dengan kecepatan awal.

Menyusun dua buah gerak lurus dipercepat beraturan tanpa kecepatan awal.

Gerak resultannya a adalah sebuah gerak lurus beraturan dipercepat beraturan tanpa kecepatan awal.

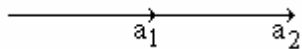


$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \alpha}$$



Hal - hal istimewa dari dua buah percepatan.

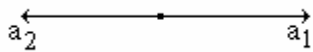
1. a_1 dan a_2 searah ($\alpha = 0^\circ$)



$$a = a_1 + a_2$$

a searah dengan a_1 dan a_2

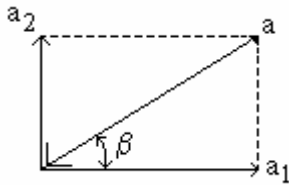
2. a_1 dan a_2 berlawanan arah ($\alpha = 180^\circ$)



$$a = a_1 - a_2$$

a searah dengan a_1 bila $a_1 > a_2$

3. a_1 dan a_2 tegak lurus ($\alpha = 90^\circ$)

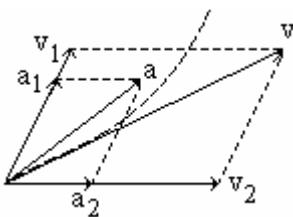


$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\text{arah } a : \text{tg } \beta = \frac{a_2}{a_1}$$

Menyusun dua buah gerak lurus dipercepat beraturan dengan kecepatan awal.

Gerak resultannya adalah sebuah gerak parabola atau sebuah gerak lurus.

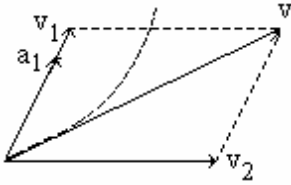


* Resultan gerakannya akan berbentuk parabola bila a dan v tidak berimpit.

* Resultan gerakannya akan berbentuk garis lurus bila a dan v berimpit.

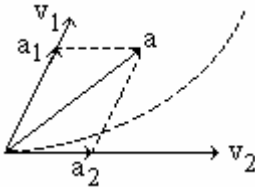
Syarat agar a dan v berimpit ialah $a_1 : a_2 = v_1 : v_2$

Menyusun gerak lurus beraturan dengan gerak lurus dipercepat beraturan dengan kecepatan awal.



Gerak resultannya adalah sebuah gerak parabola.

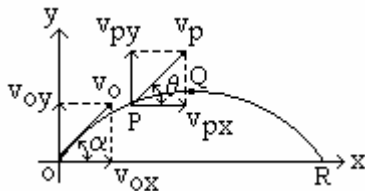
Menyusun gerak lurus dipercepat beraturan tanpa kecepatan awal dengan gerak lurus dipercepat dengan kecepatan awal.



Gerak resultannya adalah sebuah gerak parabola.

GERAK PARABOLA

Gerak ini adalah gerak dalam dua dimensi dari peluru/bola yang dilempar miring ke atas. Kita anggap bahwa gerak ini terjadi dalam ruang hampa, sehingga pengaruh udara pada gerakan peluru dapat diabaikan. Gerak sebuah peluru dipengaruhi oleh suatu percepatan grafitasi g dengan arah vertikal ke bawah. Pada arah horisontal percepatannya sama dengan nol.



Kita pilih titik asal sistem koordinat pada titik dimana peluru mulai terbang. Kita mulai menghitung waktu pada saat peluru mulai terbang, jadi kita ambil, pada saat $t = 0$ peluru di $(0,0)$

Persamaan pada sumbu x : $v_x = v_0 \cos \alpha$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

Persamaan pada sumbu y : $v_y = v_0 \sin \alpha - g \cdot t$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Untuk sembarang titik P pada lintasan :

$$v_P = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \text{tg } \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

- Titik tertinggi (titik Q) yang dapat ditempuh oleh peluru adalah :

Dapat dicari sebagai berikut :

Syarat benda mencapai titik tertinggi adalah $v_y = 0$

$$v_y = v_o \sin \alpha - gt \rightarrow 0 = v_o \sin \alpha - gt$$

$$t_{\max} = \frac{v_o \sin \alpha}{g} \rightarrow \text{substitusikan ke : } y = v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

di dapat :

$$y_{\max} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Dengan demikian titik tertinggi dicapai peluru jika $\alpha = 90^\circ$

- Jarak terjauh (titik R) yang dapat ditempuh oleh peluru adalah :

Syarat mencapai titik adalah : $y = 0$ atau waktu yang di tempuh benda adalah :

$$t = 2 \frac{v_o \sin \alpha}{g} \rightarrow \text{substitusikan ke : } x = v_o \cos \alpha \cdot t \quad \text{dan } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

di dapat :

$$x_{\max} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Dengan demikian jarak tembak terjauh oleh peluru dicapai jika sudut $\alpha = 45^\circ$

====o0o====

CONTOH SOAL.

(akan dibahas di kelas)

- Sebuah peluru ditembakkan dengan kecepatan awal 160 m/s dan dengan sudut elevasi 30° dengan mendatar ($g = 10 \text{ m/s}^2$).
 - Bilamana, di mana dan dengan kecepatan berapa peluru sampai di tanah ?
 - Bilamana, di mana dan dengan kecepatan berapa peluru mencapai ketinggian maksimum ?
 - Bilamana, pada ketinggian berapa dan dengan kecepatan berapa peluru mengenai sasaran titik B, yang jarak horisontalnya 140 meter.
- Dari ketinggian 300 meter di atas tanah ditembakkan sebuah peluru dengan kecepatan awal 80 m/s dan dengan sudut elevasi 60° .
 - Bilamana dan dimana peluru sampai di tanah ?

- b. Berapa ketinggian maksimum yang dicapai peluru sampai di tanah ?
 - c. Bilamana dan dimana kecepatan peluru bersudut 30° pada arah positif dengan bidang mendatar ?
1. Peluru ditembakkan dengan kecepatan awal 100 m/s. Benda pada posisi dari titik acuan (200 m, 100 m) terkenya sasaran peluru. Berapa besar sudut elevasinya ?

TUGAS / LATIHAN SOAL

1. Sebuah peluru ditembakkan vertikal keatas dari kedudukan (0,25 m) dengan kecepatan awal 20 m/det dan percepatan gravitasi $g = 10 \text{ m/det}^2$.
 - a. Tentukanlah ketinggian maksimum yang dicapai peluru tersebut dihitung dari tanah. (jawab : 45 meter)
 - b. Berapa saat yang diperlukan peluru tersebut untuk sampai di tanah. (jawab : 5 detik)
2. Suatu peluru ditembakkan dengan kecepatan awal $v_0 = 100 \text{ m/det}$ dengan sudut elevasi θ dan percepatan gravitasi $g = 10 \text{ m/s}^2$. Jika ditentukan $\cos \theta = 0,6$ maka tentukan :
 - a. Kedudukan peluru setelah $5 \frac{1}{2}$ detik. (jawab : 330 m, 288,75 m)
 - b. Hitung kecepatan peluru pada saat $5 \frac{1}{2}$ detik tersebut.(jawab : 65 m/s)
 - c. Hitung jauh tembakan pada arah mendatar. (jawab : 960 meter)
3. Suatu titik materi bergerak parabolik dengan kecepatan awal 20 m/s dan dengan sudut elevasi 30° pada arah positif dengan sumbu x. Pada $t_0 = 0$ detik posisi titik materi (0,20) $g = 10 \text{ m/s}^2$.
 - a. Bilamana titik materi mencapai ketinggian maksimum dari tanah ? (jawab : 1 detik)
 - b. Berapa tinggi maksimum tersebut ? (jawab : 25 meter)
 - c. Bilamana, dimana dan dengan kecepatan berapa titik materi tersebut sesaat pada waktu jatuh di tanah. (jawab : $1 + \sqrt{5}$ detik, $20\sqrt{2}$ meter, $10\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ meter)
4. Sebuah titik materi dilemparkan dengan kecepatan awal 60 m dengan sudut elevasi θ sehingga mencapai tinggi maksimum 45 m di atas tanah. Hitung θ . (jawab : 30°)
5. Sebuah benda A letaknya 20 m di atas tanah. Titik A' ialah proyeksinya ditanah. Dari tempat P ditanah yang dari A' jauhnya $40\sqrt{3}$ meter ditembakkan peluru dengan kecepatan peluru dengan kecepatan awal 40 m/s pada benda A tadi, agar supaya benda A dapat kena di tembak, berapakah sudut elvasinya ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(jawab : 30° dan $76^\circ 8'$)

6. Dari sebuah balon yang naik vertikal ke atas dengan kecepatan tetap sebesar 5 m/det, ditembakkan pada tinggi 100 m di atas tanah dengan arah mendatar sebuah peluru dengan kecepatan awal 50 m/det.
- Tentukanlah bilamana, dimana dan dengan kecepatan berapa peluru sampai di tanah? (jawab : 5 detik , 250 meter, $5\sqrt{181}$ m/s)
 - Tentukanlah tempat peluru tertinggi dari tanah ? (jawab : (25,101,25) m



GERAK ROTASI

POSISI SEBUAH TITIK DALAM GERAK MELINGKAR.

Posisi atau kedudukan sebuah titik dalam gerak melingkar dapat dinyatakan dalam *Koordinat Polar*. Sebagai :

$$\theta = \theta(t) \quad \text{untuk } r \text{ yang tetap}$$

Dengan demikian posisi titik di atas hanya tergantung dari waktu (t) saja, sedangkan :

$$\theta = \theta(r,t) \quad \text{untuk } r \text{ dan } t \text{ yang berubah}$$

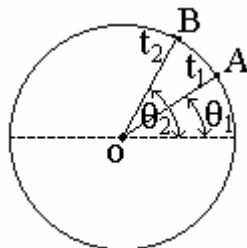
Dengan demikian posisi titik di atas tidak hanya tergantung dari waktu (t), tetapi juga besar r.

Satuan θ dalam rad, r dalam meter dan t dalam detik.

KECEPATAN SUDUT (KECEPATAN ANGULER) SUATU TITIK MATERI DALAM GERAK MELINGKAR (ROTASI).

Perhatikan !

Suatu titik materi yang bergerak dari A yang posisinya θ_1 pada saat t_1 , ke titik B yang posisinya θ_2 pada saat t_2



Vektor perpindahannya $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ dan selang waktu yang dipergunakan titik materi untuk bergerak dari A ke B adalah $\Delta t = t_2 - t_1$

Kecepatan sudut rata-rata didefinisikan :

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

Jika ingin diketahui kecepatan sudut sesaat dari titik materi pada suatu saat, misal saat titik materi berada di antara A dan B dipergunakan *kecepatan sudut sesaat*.

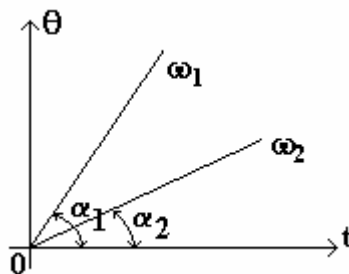
Kecepatan sudut sesaat didefinisikan :

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Secara matematis ditulis sebagai :

$$\bar{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$$

Nilai dari komponen kecepatan sudut sesaat dari suatu titik materi dapat dilihat dari kemiringan grafik yang dibentuk oleh komponen posisi θ terhadap t .



$$\omega_1 = \text{tg } \alpha_1$$

$$\omega_2 = \text{tg } \alpha_2$$

Sebaliknya untuk menentukan posisi titik materi jika diketahui fungsi kecepatan sudut diselesaikan dengan *INTEGRAL*.

$$\bar{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$d\theta(t) = \bar{\omega}(t) dt$$

$$\int d\theta(t) = \int \bar{\omega}(t) dt$$

$$\theta(t) = \int \bar{\omega}(t) dt$$

PERCEPATAN SUDUT (α)

Kecepatan sudut titik materi dapat berubah-ubah setiap saat, baik besar, atau arah, ataupun kedua-duanya yang disebabkan oleh karena adanya *percepatan sudut* yang dialami titik materi tersebut.

Jika pada saat t_1 kecepatan sudutnya ω_1 dan pada saat t_2 kecepatan sudutnya ω_2 percepatan sudut rata-ratanya dalam selang waktu $t = t_2 - t_1$ didefinisikan sebagai :

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

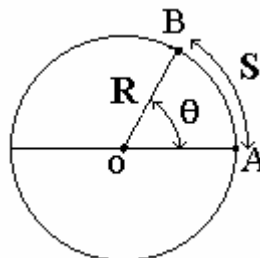
percepatan sudut sesaatnya :

$$\bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d(d\theta)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

DALAM GERAK MELINGKAR TERDAPAT PERCEPATAN TANGENSIAL DAN PERCEPATAN CENTRIPETAL.

Kita tinjau titik A berada pada lingkaran berjari-jari R dengan titik pusatnya O.



Kemudian bidang lingkaran tersebut diputar sehingga dalam gerak linier A bergerak sampai titik B dengan menempuh jarak S, sedang sudut yang ditempuh θ

Karena θ adalah sudut pusat lingkaran dan s adalah busur lingkaran, berlakulah $s = \theta \cdot R$

Bila sudut yang ditempuh cukup kecil $\Delta \theta$, demikian panjang busurnya cukup kecil Δs dalam waktu Δt , maka berlakulah :

$$\Delta v = \Delta \omega R$$

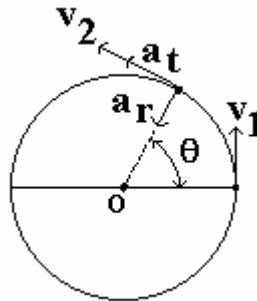
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} R$$

$$a_t = \alpha \cdot R$$

a_t = percepatan tangensial.

Percepatan di atas disebut dengan percepatan tangensial yaitu : percepatan yang arahnya bersinggungan dengan lingkaran, sedangkan percepatan yang arahnya selalu menuju titik pusat lingkaran disebut *percepatan centripetal* (a_r).

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} = \omega^2 R$$



Dari gambar di atas terlihat bahwa percepatan tangensial (a_t) arahnya tegak lurus dengan percepatan centripetal dan bersinggungan dengan keliling lingkaran yang berpusat di O.

KESIMPULAN.

Persamaan-persamaan pada gerak translasi dan gerak rotasi terdapat hubungan yang erat.

PADA GERAK DENGAN PERCEPATAN TETAP.

GERAK TRANSLASI (ARAH TETAP) Hanya berlaku untuk GLBB	GERAK ROTASI (SUMBU TETAP) Hanya berlaku untuk GMBB
$v_t = v_0 + at$	$\omega t = \omega_0 + \alpha \cdot t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$
$v_t^2 = v_0^2 + 2 a \cdot s$	$\omega t^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \cdot \theta$

GERAK TRANSLASI	GERAK ROTASI	Hubungannya
Pergeseran linier s	Pergeseran sudut θ	$s = \theta \cdot R$
Kecepatan linier $v = \frac{ds}{dt}$	Kecepatan sudut $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v = \omega \cdot R$
Percepatan Linier $a = \frac{dv}{dt}$	Percepatan sudut $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a = \alpha \cdot R$

CONTOH SOAL.

(akan dibahas di kelas)

1. Sebuah benda bergerak melingkar dengan diameter 4 meter, Laju sudutnya berubah beraturan dari 20 rad/s menjadi 30 rad/s dalam waktu 5 detik, hitunglah jarak yang ditempuh benda selama itu.
2. Sebuah partikel melakukan gerak melingkar pada diameter 20 meter dengan kecepatan anguler mula-mula 10 rad/s dan percepatan anguler $\alpha = 2t - 4$, searah jarum jam. hitunglah jarak (lintasan) yang ditempuh oleh partikel tersebut setelah bergerak 6 detik pertama.
3. Dua buah benda melakukan gerak melingkar dari titik yang sama, dalam waktu yang sama dan arah yang sama pula. Benda A berangkat dengan kelajuan sudut awal 2 rad/s dan perlajuan sudut $\alpha = t + 1$ rad/s² dan benda B dengan kelajuan sudut awal 3 rad/s dan perlajuan sudut $\alpha = \frac{2}{3}$ rad/s². Jika diameter lingkaran yang dilalui 60 m, setelah menempuh berapa meter keduanya bertemu lagi untuk pertama kalinya.

TUGAS / LATIHAN SOAL-SOAL

1. Sebuah bola digantungkan pada seutas tali yang panjangnya 50 cm sehingga dapat berayun. Ketika bola tersebut terletak 30° terhadap garis vertikal, mempunyai kecepatan 2 m/s.
Tentukanlah :
 - a. Percepatan sentripetal. (jawab : $a_{cp} = 8 \text{ m/s}^2$)
 - b. Percepatan tangensial.(jawab : $a_t = 5 \text{ m/s}^2$)
 - c. Percepatan bola pada posisi 30° terhadap garis vertikal. (jawab : $a = \sqrt{89} \text{ m/s}^2$)
2. Batu gerinda berjari-jari 5 cm diputar dengan kecepatan sudut 15 rad/s serta percepatan sudut 10 rad/s^2 . Tentukan percepatan tangensial dan besar percepatan. (jawab : $v = 0,75 \text{ m/s}$, $a_t = 0,5 \text{ m/s}^2$, $a_{cp} = 11,25 \text{ m/s}^2$, $a = 11,26 \text{ m/s}^2$)
3. Sebuah roda berputar mula-mula dengan $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Setelah interval 3 sekon, putarannya dipercepat sehingga $\omega_2 = 40 \text{ rad/s}$. Carilah percepatan sudut rata-rata selama waktu itu. (jawab : $\alpha_t = 10 \text{ rad/s}^2$)
4. Percepatan sudut suatu roda adalah 12 rad/s^2 . Carilah waktu yang digunakan untuk perubahan kecepatan sudut dari 100 rad/s menjadi 340 rad/s. (jawab : $t = 20$ detik)
5. Sebutir partikel berputar pada lingkaran mempunyai persamaan $\theta = 3t^2 + 2t$, dengan θ diukur dalam radian dan t dalam detik. Carilah kecepatan sudut dan percepatan sudut sesudah 4 sekon. (jawab : $\alpha_{(4)} = 6 \text{ rad/s}^2$, $\omega_{(4)} = 6.4 + 2 = 26 \text{ rad/s}$)
6. Sebuah roda yang berputar pada kecepatan 6 putaran/detik mengalami percepatan sudut sebesar 4 rad/s^2 . Berapakah waktu diperlukan agar kecepatan sudut sebesar 26 putaran/detik dicapai dan berapa pula jumlah putaran telah dilakukan roda dalam waktu itu. (jawab : Jumlah Putaran = 502,4 putaran.)

7. Suatu bidang lingkaran berputar dengan persamaan $a_t = 5t + 6$ (a dalam m/s^2 dan t dalam detik). Bila jari-jari lingkaran 2 m sedangkan pada keadaan awal kecepatan tepi lingkaran 5 m/s tentukan :
- Kecepatan sudut pada saat $t = 3$ detik. (jawab : $\alpha = 2,5 t + 3$, $\omega_{(3)} = 22,75 \text{ rad/s}$)
 - Percepatan radial dan percepatan tangensial pada saat $t = 3$ sekon.
(jawab : $a_r = 1035,125 \text{ m/s}^2$, $a_t = 21 \text{ m/s}^2$)
 - Sudut yang ditempuh selama 4 detik. (jawab : $\theta = 60,67 \text{ rad}$)
8. Suatu benda, mula-mula diam ($\theta = 0$ dan $\omega = 0$ pada $t = 0$) dipercepat dalam lintasan melingkar berjari-jari 1,3 m mengikuti persamaan $\alpha = 120 t^2 - 48 t + 16$. Tentukanlah posisi sudut dan kecepatan sudut benda itu sebagai fungsi waktu dan komponen percepatan tangensial serta komponen percepatan centripetalnya.
(jawab : $\omega = 40 t^3 - 24 t^2 + 16t$; $\theta = 10 t^4 - 8 t^3 + 8 t^2$; $a_t = 156 t^2 - 62,4 t + 20,8$
 $a_{cp} = 2080 t^6 - 2496 t^5 + 412,8 t^4 - 998,4 t^3 + 332,8 t^2$)

=====o0o=====